INRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 124

ITÉRÉES D'APPLICATIONS LINÉAIRES PAR MORCEAUX

Alain MERITET

Avril 1982

ITEREES D'APPLICATIONS LINEAIRES PAR MORCEAUX

Alain MERITET

INRIA
Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex

ABSTRACT

The n^{th} iterate is obtained by the not well-known position of the x point correlated to the iterate but by an association to the defined position with an application of $\mathbb{N}$ in a finite part included in $\mathbb{N}$. The result appears by using an explicit formula taking into account the belonging to the unit segment of this n^{th} iterate.

RESUME

La valeur de l'itération $n^{\text{ième}}$ est calculée en supposant non connue explicitement la position du point x lors des itérations mais en associant cette position à une application de $\mathbb{N}$ dans une partie finie de $\mathbb{N}$. Le résultat apparaît en utilisant une formule explicite et l'appartenance à l'intervalle unité de l'itérée à l'ordre n du point x.

ITEREES D'APPLICATIONS LINEAIRES PAR MORCEAUX

INTRODUCTION

La valeur de l'itérée $n^{\text{ième}}$ est calculée en supposant non connue explicitement la position du point x lors des itérations mais en associant cette position à une application de N dans une partie fine de N. Le résultat apparaît en utilisant une formule explicite et l'appartenance à l'intervalle unité de l'itérée à l'ordre n du point x.

On utilise en cela la notion de mesure invariante introduite par Rechard. Cette idée étant considérée dans le cadre de Dunford et Miller.

NOTATIONS

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels $I = [0,1]$, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, $a \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $x = [x] + (x)$, $[x] \in \mathbb{N}$, $(x) \in I - \{1\}$. On appelle $[x]$ partie entière de x et (x) partie fractionnaire de x.

Soit $x \in I$, alors en base 3, on a :

$$x = \sum_{p=o}^{\infty} a_p 3^{-p}, \quad a_p \in \{0,1,2\} \tag{1}$$

Soit $d(0,1) = \{x | a_p \in \{0,1\}\}$ et $d(0,2) = \{x | a_p \in \{0,2\}\}$, si :

$$x_1 = \sum_{p=o}^{\infty} a'_p 3^{-p} \quad , \quad x_2 = \sum_{p=o}^{\infty} a''_p 3^{-p}$$

on pose :

$$x_1 \times x_2 = \sum_{p=o}^{\infty} a'_p \, a''_p$$

De plus $3^n x = [3^n x] + (3^n x)$ et d'après (1)

$$3^n x = \sum_{p=o}^{n} a_p \, 3^{n-p} + \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p \, 3^{n-p} \qquad n \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

Notons :

$$B = \{x \in I \mid x = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \, 3^{-p}, \; a_p \in \{0,2\}\}$$

est l'ensemble triadique de Cantor. On a :

$$\frac{1}{3} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{2}{3^p} \in \mathfrak{Z}, \quad 1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{3^p} \in \mathfrak{Z}$$

Soit $\mathfrak{Z}^*$ un ensemble de Cantor, c'est-à-dire un ensemble fermé non dénombrable, de dimension topologique nulle sans point isolé et de mesure de Lebesgue nulle.

Soit $y_i(x) = a_i x + b_i$, $i \in \mathbb{A}_2 = \{1,2,\ldots,a\}$, $|a_i| = a$.

On vérifie immédiatement que :

$$y_i \circ y_j(x) = a_i \, a_j \, x + a_i \, b_j + b_i$$

$$y_k \circ y_i \circ y_j(x) = a_k \, a_i \, a_j \, x + a_k \, a_i \, b_j + a_k \, b_i + b_k$$

Soit $\mathcal{C}^{o}_{L}(I)$ l'ensemble des applications surjectives continues linéaires affinés par morceaux de I sur I à pente bornées et $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^*$ dans A_2. Soit aussi $f \in \mathcal{C}^{o}_{L}(I)$, alors :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{a-1} y_i(x) \, I_{[\frac{a-1}{a},\frac{i}{a})}(x) + y_a(x) \, I_{[\frac{a-1}{a},1]}(x) \qquad (3)$$

où $I_B(x)$, $B \subset \mathbb{R}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble B. Alors on désigne par f^n l'itérée à l'ordre n de f en posant $f_\nu(x) = f(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{aligned} f^{n\cdot}(x) &= \coprod_{\nu=1}^{n} f_{\nu}(x) \\ &= f\Big(\coprod_{\nu=1}^{n-1} f_{\nu}(x)\Big) \end{aligned} \tag{4}$$

et la convention :

$$f^{1\cdot}(x) = f(x).$$

Soit alors $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{A}_2)$. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\coprod_{\nu=1}^{n.} y_{\tau(\nu)}\ (x) = y_{\tau(n)}\ \Big(\coprod_{\nu=1}^{n-1} y_{\tau(\nu)}\ (x)\Big) \tag{5}$$

et la convention :

$$\coprod_{\nu=1}^{2} y_{\tau(\nu)}(x) = y_{\tau(2)} \circ y_{\tau(1)}\ (x).$$

Posons ensuite :

$$e_i(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{i,\tau(\nu)} \qquad i \in \mathbb{A}_2$$

δ masse de Dirac.

Alors définissons $\tau \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{A}_2)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= y_{\tau(1)}(x) \\ f^{2\cdot}(x) &= y_{\tau(2)}(f(x)) \\ f^{n\cdot}(x) &= y_{\tau(n)}\Big(\coprod_{\nu=1}^{(n-1)} f(x)\Big) \end{aligned} \tag{6}$$

ou en d'autre terme :

$$x \in \Big[\frac{\tau(1)-1}{a}, \frac{\tau(1)}{a}\Big) \text{ si } \tau(1) < a, \quad x \in \Big[\frac{\tau(1)-1}{a}, \frac{\tau(1)}{a}\Big] \text{ si } \tau(1) = a$$

$$f(x) \in \Big[\frac{\tau(2)-1}{a}, \frac{\tau(2)}{a}\Big) \text{ si } \tau(2) < a, \quad x \in \Big[\frac{\tau(2)-1}{a}, \frac{\tau(2)}{a}\Big] \text{ si } \tau(2) = a$$

$$f^{(n-1)\cdot}(x) \in [\frac{\tau(n-1)-1}{a}, \frac{\tau(n-1)}{a}) \text{ si } \tau(n-1)<a,$$

$$x \in [\frac{\tau(n-1)-1}{a}, \frac{\tau(n-1)}{a}] \text{ si } \tau(n-1)=a \qquad (7)$$

On en déduit en particulier :

$$\sum_{i=1}^{a} e_i(n) = n \qquad (8)$$

Et que les fonctions $e_i(n)$ sont croissantes au sens large. D'autre part, compte tenu de (3), (4), (5), (6), (7), en remplaçant $f_\nu(x)$ par sa valeur, on obtient :

$$f^{n\cdot}(x) = \coprod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)$$

$$= \coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \qquad (9)$$

où τ est définie par (6) et (7).

Théorème : Soit f une fonction surjective continue linéaire affinée par morceaux de I dans I à pente bornée alors l'itérée à l'ordre n de f a pour valeur :

$$f^{n\cdot}(x) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{e_i(n)} x + \sum_{j=o}^{n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell^{e_\ell(n)-e_\ell(n-j)} \right) b_{\tau(n-j)} \qquad (10)$$

où $\tau \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2)$.

En particulier, si a = 3 et $|a_i| = a$, $i \in \mathbb{A}_2$, alors :

$$|f^{n\cdot}(x) - \tfrac{1}{2}| = |(3^n x) - \tfrac{1}{2}|$$

et si a = 9 et $|a_i| = a$, $i \in \mathbb{A}_2$, alors

$$|f^{n\cdot}(x) - \tfrac{1}{2}| = |(9^n x) - \tfrac{1}{2}|$$

<u>Lemme 1</u> : Supposons

$$\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = \prod_{i=1}^{a} a_i^{\varphi_i(n)} x + \sum_{\substack{j=0 \\ s_j(n)=j}}^{n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{\xi_\ell(k,j)} \right) b_{\mu_j(n)}$$

où :

$$\varphi_i(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2)$$

$$\sum_{i=1}^{a} \xi_\ell(n,j) = s_j(n) \quad , \; \xi_\ell(n,j) \in \mathbb{N}, \; \ell \in A_2$$

$$s_j \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2)$$

$$\mu_j \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{A}_2), \; j \in \mathbb{A}_1 = \{0,1,\dots,a-1\}.$$

<u>Preuve</u> : On effectue un raisonnement par récurrence. Supposons l'énoncée vérifiée à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, on a en appliquant l'égalité (9) :

$$\begin{aligned}
\coprod_{\nu=1}^{n+1} y_{\tau(\nu)}(x) &= y_{\tau(n+1)}\Big(\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x)\Big) \\
&= a_{\tau(n+1)}\Big(\mathop{}_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x)\Big) + b_{\tau(n+1)} \\
&= a_{\tau(n+1)}\Big[\prod_{i=1}^{a} a_i^{\varphi_i(n)} x + \sum_{\substack{j=o \\ s_j(n)=j}}^{n-1} \Big(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{\xi_\ell(nj)}\Big) b_{\mu_j(n)} + b_{\tau(n+1)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_i^{\varphi_i(n)} \, a_{\tau(n+1)}) x + \sum_{\substack{j=o \\ s_j(n)=j}}^{n-1} \Big(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{\xi_\ell(n,j)} \, a_{\tau(n+1)}\Big) b_{\mu_j(n)} \\
&\qquad + b_{\tau(n+1)} \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} a_i^{\varphi_i(n+1)} x + \sum_{\substack{j=o \\ s_j(n+1)=j}} \Big(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{\xi_\ell(n+1,j)}\Big) b_{\mu_j(n+1)}
\end{aligned}$$

ce qui détermine le raisonnement par récurrence.

<u>Lemme 2</u> :

$$
\begin{aligned}
&\varphi_i(n+1) = \varphi_i(n) + \delta_{i,\tau(n)} \\
&\varphi_i(1) = \delta_{i,\tau(1)}, \quad i \in \mathbb{A}_2,\ n \in \mathbb{N}^* \\
&s_o(n) = 0 \text{ et } \xi_\ell(n,0) = 0,\ n \in \mathbb{N}^* \\
&s_1(n) = 1 \text{ et } \xi_\ell(n,1) = \delta_{\ell,\tau(n)},\ n \in \mathbb{N}^* \\
&\mu_o(n) = \tau(n) \text{ et } \mu_o(1) = \tau(1) \quad ,\ n \in \mathbb{N}^* \\
&\mu_{j+1}(n+1) = \mu_j(n),\ n \in \mathbb{N}^* \\
&\xi_{\ell(n+1,j+1)} = \xi_{\ell(n,j)} + \delta_{\ell,\tau(n+1)} \quad \ell \in \mathbb{A}_2,\ n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}
$$

Le résultat est obtenu en utilisant les identités données par la formule de récurrence à l'ordre n et itération de la formule à l'ordre n-1.

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n+1} a_i^{\varphi_i(n+1)}\, x + \sum_{\substack{j=o \\ s_j(n+1)=j}}^{n} \Big(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{\xi_j(n+1,j)}\Big) b_{\mu_j(n+1)} \\
&= \prod_{i'=1}^{n} a_i^{\varphi_{i'}(n)}\, a_{\tau(n+1)}\, x + \sum_{j'=o}^{n-1} \\
&\Big(\prod_{\ell'=1}^{a} a_{\ell'}^{\xi_\ell(n,j')}\, a_{\tau(n+1)}\Big) b_{\mu_j(n)} + b_{\tau(n+1)}\Big)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

On en déduit, pour les exposants de a_i :

$$\varphi_i(n+1) = \varphi_i(n) + \delta_{i,\tau(n)},\ \varphi_i(1) = \delta_{i,\tau(1)},\ i \in \mathbb{A}_2,\ n \in \mathbb{N}^* \tag{12}$$

Pour les valeurs de ξ_o, μ_o, ξ_1 :

$$
\begin{aligned}
&s_o(n) = \xi_\ell(n,o) = 0 \\
&\mu_o(n+1) = \tau(n+1),\quad \mu_o(1) = \tau(1) \\
&s_1(n+1) = \xi_\ell(n+1,1) = \delta_{\ell,\tau(n+1)}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Et finalement pour les valeurs de μ_j et ξ_j :

$$\mu_{j+1}(n+1) = \mu_j(n) \tag{14}$$

$$\xi_\ell(n+1,j+1) = \xi_\ell(n,j) + \delta_{\ell,\tau(n+1)}. \tag{15}$$

Lemme 3 :

$$\varphi_i(n) = e_i(n) \qquad i \in \mathbb{A}_2$$
$$\mu_j(n) = \tau(n-j) \qquad n \in \mathbb{N}^*,\ j \in \mathbb{A}_1$$
$$\xi_\ell(n,j) = e_\ell(n) - e_\ell(n-j) \qquad j \in \mathbb{A}_1,\ n \in \mathbb{N}^*, \ell \in A_2$$

Preuve : Utilisons le Lemme 2.1. d'après ($_{12}$), on a :

$$\varphi_i(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{i,\tau(\nu)} = e_i(n) \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Prenons $j \in \mathbb{N}_1$ alors $n-j \in \mathbb{N}_2$. Il en résulte en utilisant ($_{14}$) :

$$\mu_j(n) = \mu_{j-1}(n-1) = \dots = \mu_o(n-j) = \tau(n-j)$$

et finalement, à partir de ( ), ( ), on a en utilisant une récurrence inverse :

$$\xi_\ell(n,j) - \xi_\ell(n-1,j-1) = \delta_{\ell,\tau(n)}$$
$$\xi_\ell(n+1-j,1) - \xi_\ell(n-j,o) = \delta_{\ell,\tau(n-j+1)}$$

d'où comme $\xi_\ell(n-j,o) = 0$, on a :

$$\xi_\ell(n,j) = \sum_{\nu=n-j+1}^{n} \delta_{\ell,\tau(\nu)}$$
$$= e_\ell(n) - e_\ell(n-j).$$

Démonstrations du théorème : A partir du Lemme 1 et du Lemme 3, on obtient la formule :

$$\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = \prod_{i=1}^{a} a_i^{e_i(n)}\, x + \sum_{j=o}^{n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{a} a_\ell^{e_\ell(n)-e_\ell(n-j)} \right) b_{\tau(n-j)} \tag{16}$$

Faisons alors $a = 3$, $|a_i| = a$ et $i \in \mathbb{A}_2$.

Prenons $b_1 = 0$, $b_2 = 2 \in \mathbb{N}$ et $-b_3 = 2 \in \mathbb{N}$. Il en résulte d'après ($_{16}$), ($_{18}$) :

$$\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = (-1)^{e_2(n)} 3^n x + E$$

avec :

$$E = \sum_{j=o}^{n-1} \left(\prod_{\ell=1}^{3} a_\ell^{e_\ell(n)-e_\ell(n-j)} \right) b_{\tau(n-j)} \in \mathbb{N}$$

D'autre part, $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \in I$, il en résulte (2) :

$$\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = (-1)^{e_2(n)} [3^n x] + (-1)^{e_2(n)} \left(3^n x\right) + E$$

Deux cas sont alors à distinguer :

i) $e_2(n)$ pair $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = E + [3^n x] + \left(3^n x\right) \in I$

1) Si $\left(3^n x\right) > 0$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = \left(3^n x\right)$

2) Si $\left(3^n x\right) = 0$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \in F_r(I)$

ii) $e_2(n)$ impair $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = E - [3^n x] - \left(3^n x\right) \in I$

1) Si $\left(3^n x\right) > 0$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 1 - (3^n x)$

2) Si $\left(3^n x\right) = 0$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \in F_r(I)$

Plus précisément, on constate dans le cas i.2) et ii.2) que si :

$\left(3^{n-1} x\right) = 3^{-1}$ soit $a_{n-1} = 1$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 1$

$\left(3^{n-1} x\right) = 2.3^{-1}$ soit $a_{n-1} = 2$ alors $\coprod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 0$

On obtient alors la formule définitive à partir (9).

De même lorsque $a = 9$ et $|a_i| = a$, $i \in \mathbb{A}_2$, on a en prenant $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = -2$, $b_4 = 4$ $b_5 = -4$, $b_6 = 6$, $b_7 = -6$, $b_8 = 8$, $b_9 = -8$. Il en résulte à présent d'après (16), (18) avec :

$$e^{*}(n) = \sum_{\substack{i=1\\ 2\nmid i}}^{n} e_i(n), \quad e^{**}(n) = \sum_{\substack{i=1\\ 2\mid i}}^{n} e_i(n)$$

$$\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = (-1)^{e^{**}(n)}\, 9^n x + \Gamma$$

avec :

$$\Gamma = \sum_{j=o}^{n-1} \Big(\prod_{\ell=1}^{9} a_\ell^{\,e_\ell(n)-e_\ell(n-j)} \Big) b_{\tau(n-j)}$$

Distinguons à nouveau deux cas :

i) $e^{**}(n)$ pair $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(n) = \Gamma + [9^n x] + \left(9^n x\right) \in I$

1) Si $\left(9^n x\right) > 0$ Alors $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = \left(9^n x\right)$

2) Si $\left(9^n x\right) = 0$ Alors $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \in F_r(I)$

ii) $e^{**}(n)$ impair $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = \Gamma - [9^n x] - \left(9^n x\right) \in I$

1) Si $\left(9^n x\right) > 0$ Alors $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 1 - \left(9^n x\right)$

2) Si $\left(9^n x\right) = 0$ Alors $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) \in F_r(I)$

Plus précisément, on constate dans le cas i.2) et ii.2) que :

$$\text{si } \left(3^{n-1} x\right) = k.3^{-2} \quad k \in \mathbb{A}_2 \quad 2\nmid k \quad \text{alors } \prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 1$$

$$\text{si } \left(3^{n-1} x\right) = k.3^{-2} \quad k \in \mathbb{A}_1 \quad 2\mid k \quad \text{alors } \prod_{\nu=1}^{n} y_{\tau(\nu)}(x) = 1$$

On termine la démonstration en utilisant (9).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOOB J.L.
Stochashc Processes, New York, 1953

[2] DUNFORD N. and MILLER D.S.
On the ergodic theorem, Transactions of American Mathematical Society, vol. 67 (1949), pp. 217-240

[3] ITO K., MAC KEAN H.P. Jr
Diffusion Processes and their Sample Path-Springer Verlag, 1974.

[4] RECHARD O.W.
Invariant measures for many-one transformations. AMS presented September 2, 1954, Los Alamos.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique